http://moebius.dm.uba.ar

moebius@dm.uba.ar

Guía Visual Surfer

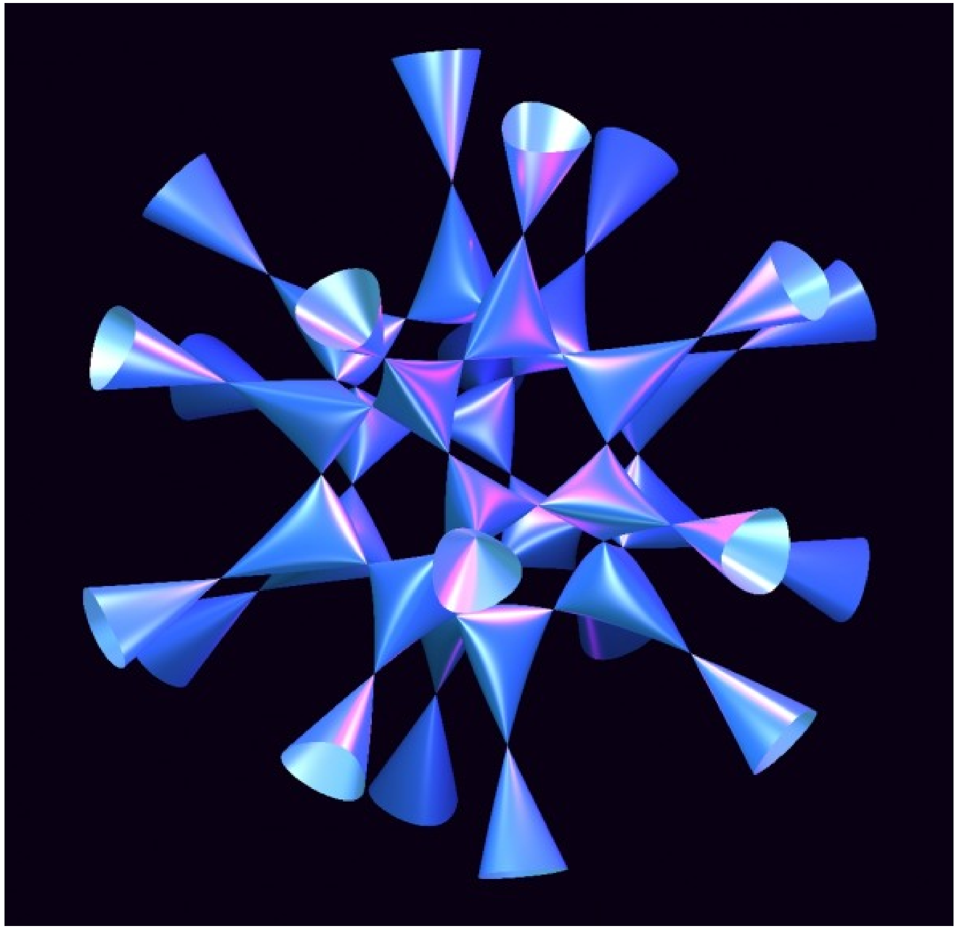
Darío D. Devia

Un proyecto de

Con el apoyo de

Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

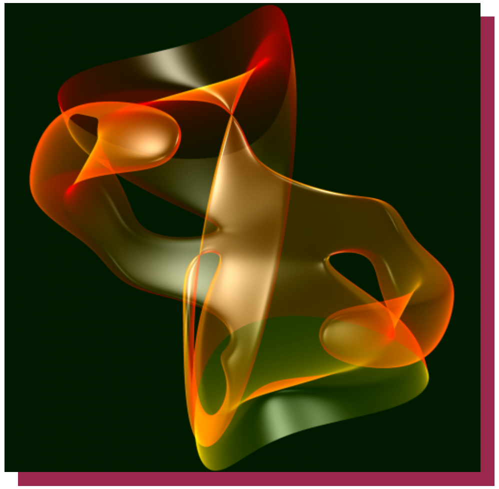
<u>*Guía Visual SURFER*</u>

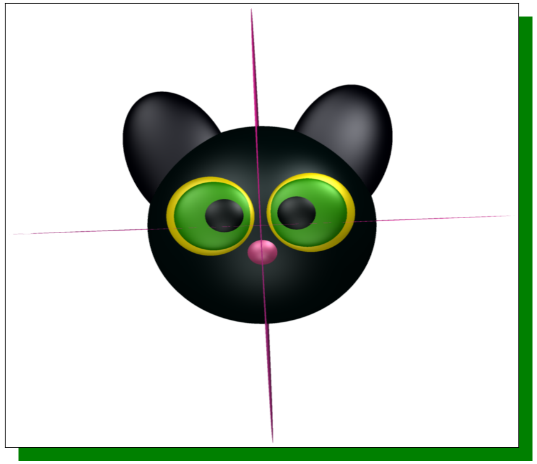


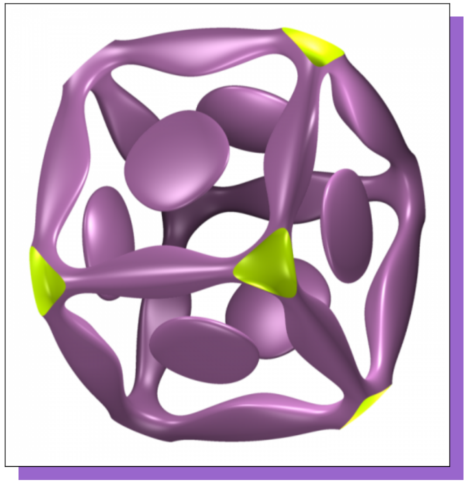
Superficie conocida como “La séxtica de Barth”

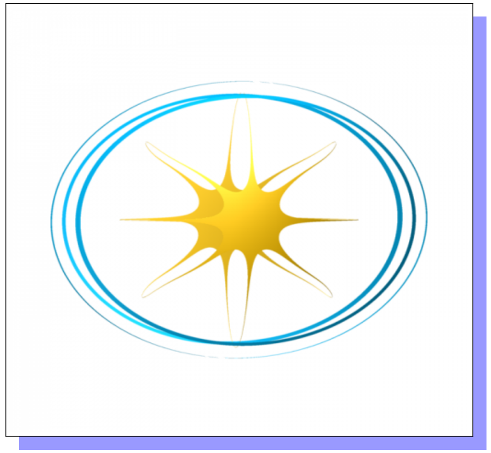
Autor: Darío D. Devia (Docente CBC - UBA)
Contacto: dardev17@gmail.com

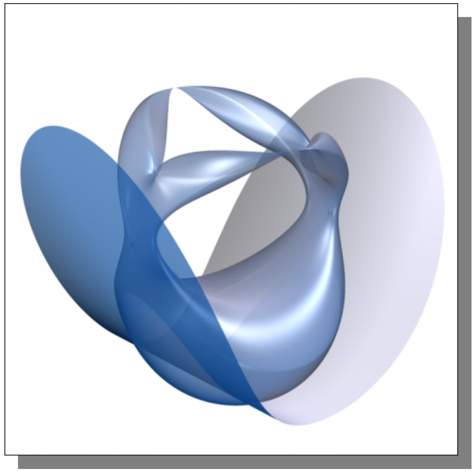
¡Mirá las imágenes que podés lograr con el SURFER!

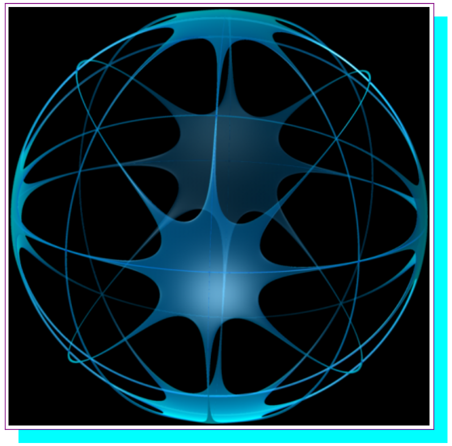


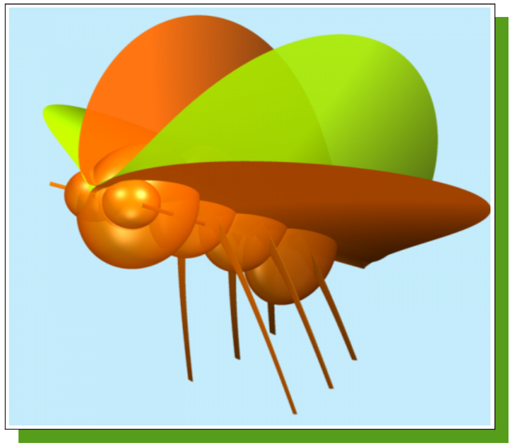












¿De qué trata esta Guía?

Las imágenes de frutas, insectos, paisajes o las abstracciones, son básicamente deformaciones, modificaciones o superposiciones de "objetos geométricos comunes y conocidos": esferas, conos, cilindros, planos, etc.

La idea de esta guía es que vayas siguiéndola con el SURFER, creando tus propias imágenes y además puedas darte cuenta de cómo funciona la relación entre forma y fórmula.

¿A quiénes está dirigida?

Podríamos decir que está dirigida al público en general, gente con ganas de tomar parte en una de las formas en que podemos ver belleza en la matemática.

Sin embargo, básicamente está dirigida a docentes y alumnos de cualquier área que quiera relacionar el arte y la ciencia. Intentaremos dar las herramientas necesarias para que puedan llevar a cabo con éxito tal emprendimiento y al mismo tiempo sorprenderse y disfrutar

Secciones de la Guía

La primer sección se llama ***Interactuando con la Geometría Algebraica;*** aquí directamente experimentamos libremente, poniendo algunas ecuaciones en el SURFER y modificándolas para observar qué cambios se producen en los gráficos

Una segunda sección que llamamos ***Comencemos a entender***; aquí empezaremos a darte los lineamientos generales; una idea de porqué ves lo que ves ya adentrándonos en la matemática y en cómo trabaja el programa SURFER.

La tercer sección, llamada ***Trucos Útiles,*** estará dedicada a mostrarte algunos trucos ingeniosos que te ayudarán a plasmar tus ideas cuando estés creando tu propia imagen.

En la cuarta sección, ***Manos a la Obra***, te recomendaremos una serie de ejercicios y actividades para que luego puedas manejarte con soltura en tus creaciones.

Y por último, en una quinta sección, llamada ***Para Curiosos y Avanzados***, te mostraremos algunas imágenes famosas de la geometría algebraica y te contaremos algo de sus historias

Interactuando con la Geometría Algebraica

SURFER es un programa para visualizar superficies algebraicas reales (en tres dimensiones). Esto es, en la linea de comandos que aparece en la parte de abajo de la interfaz gráfica del SURFER, se introduce una expresión algebraica (una fórmula que contenga las letras “x”, “y” y “z”, elevadas a alguna potencia, sumadas, restadas o multiplicadas, y números sumando, restando o multiplicando) igualada a cero.

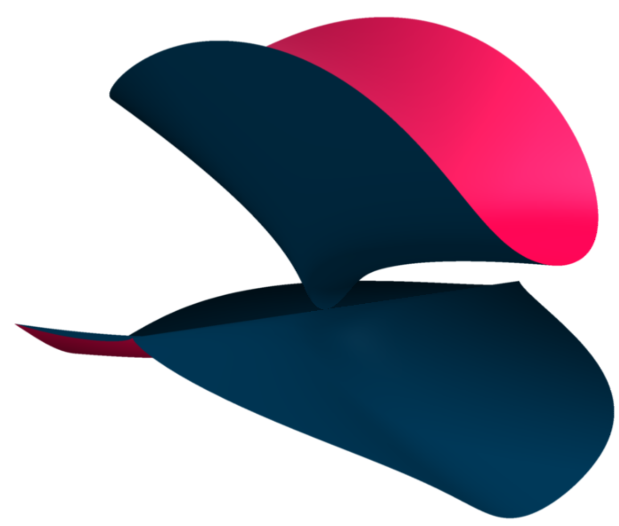
El programa se encargará de dibujar su representación gráfica.

Juguemos con algunas ecuaciones para observar la relación entre fórmula y forma.

Introduzcamos entonces en la linea de comando, por ejemplo:

x^2 + y^2*z^3 – z^4 = 0

Veremos algo así:

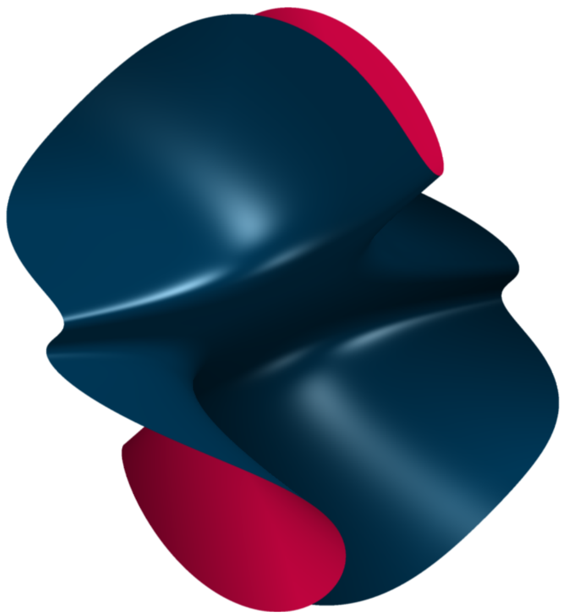


$x^2+y^2z^3-z^4=0$

Modifiquemos algunas cosas en la ecuación que pusimos en la línea de comando.

Borremos el exponente 2 que tiene la “x”. Nos queda una expresión algebraica muy parecida y sin embargo vemos que hay un gran cambio en la forma.

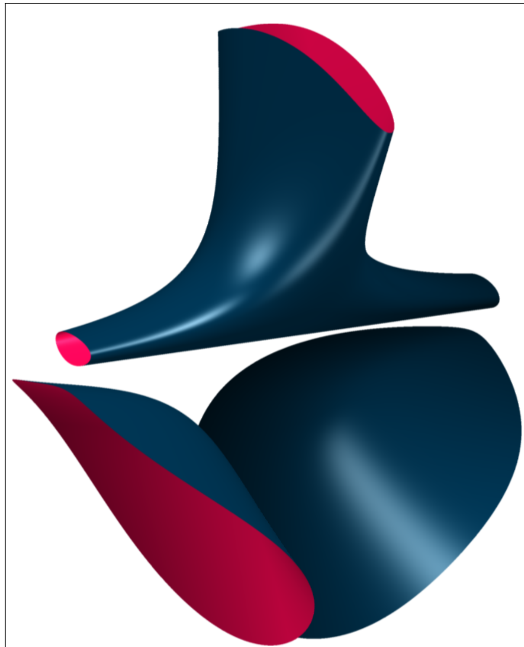
$x+y^2z^3-z^4=0$



$x+y^2z^3-z=0$

Y así podemos empezar a realizar varias modificaciones, cambiando exponentes, borrando exponentes, cambiando una multiplicación (*) por una suma (+) y observando qué ocurre con el gráfico.

Aquí te mostramos algunas y te invitamos a que hagas tus propios experimentos y saquemos algunas conclusiones.

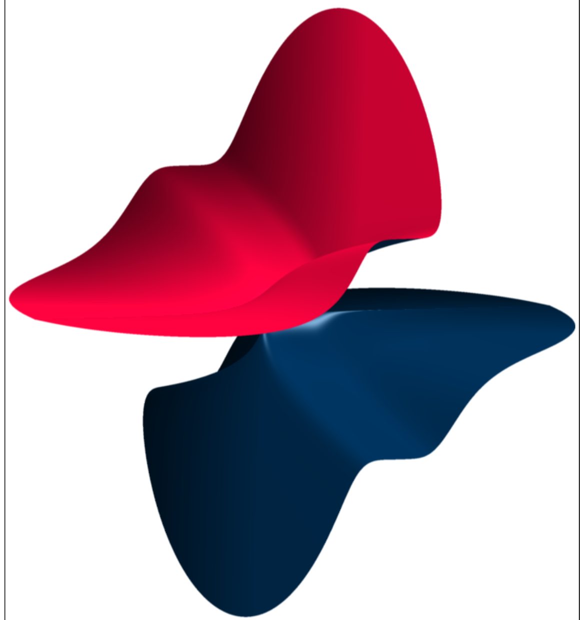


$x^2+y^2z^3-z=0$

Por ejemplo: ¿Es lo mismo cambiar un exponente par por otro par que por otro impar?

$x^2y^2+z^3-z^4=0$

$x^2+y^2+z^3-z^4=0$



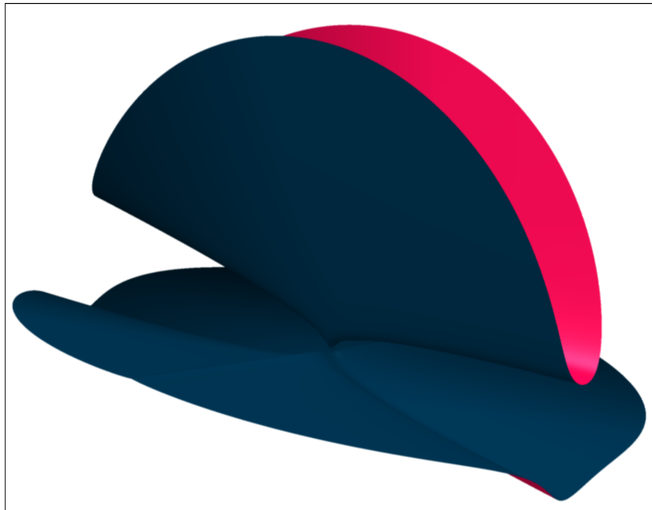
$x^2+y^5z^3-z^4=0$

Además con el botón izquierdo del mouse podés agarrar la imagen y rotarla a tu gusto

Todas estas imágenes son solo el resultado de pequeñas modificaciones de la fórmula que pusimos al principio

También vemos que si utilizamos el zoom (la barra deslizante que aparece a un costado), podemos ver "cambios en la forma" pero estos no son cambios reales pues lo único que estamos haciendo es ver la misma forma más de cerca o más de lejos, es decir, sólo cambiamos la escala.

$x^2+y^2z^3-z^4=0$ (zoom+)

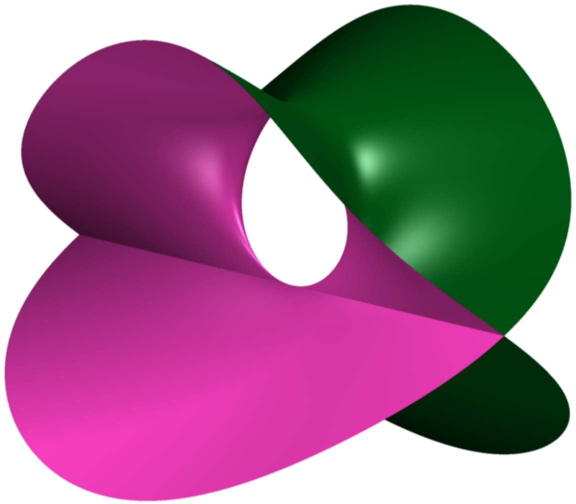


$x^2+y^2z^3-z^4=0$ (zoom-)

Si queremos hacer una modificación verdadera en la forma, debemos cambiar cambiar algo de la ecuación, como ya lo estuvimos haciendo.

Hay una manera de ir viendo “cambios continuos” en la forma, y esto se logra mediante un parámetro (en este caso se llama “**a**”), y lo introduciremos en la expresión por ejemplo multiplicando a uno de los términos.
Veamos qué le ocurre por ejemplo a la imagen dada por la expresión

y^2+z^3-z^4-x^2*z^2=0



$y^2+z^3-z^4-x^2z^2=0$

si la modificamos así en la línea de comando del SURFER

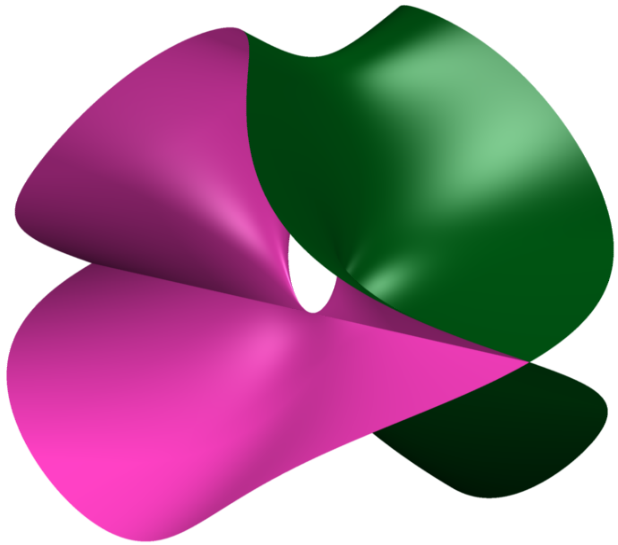
10***a***y^2 + z^3 – z^4 – x^2*z^2 =0

ó así

y^2 + z^3 - z^4 – 10***a***x^2*z^2 =0

obtendremos

$10ay^2+z^3-z^4-x^2z^2=0$, $a=0,5$



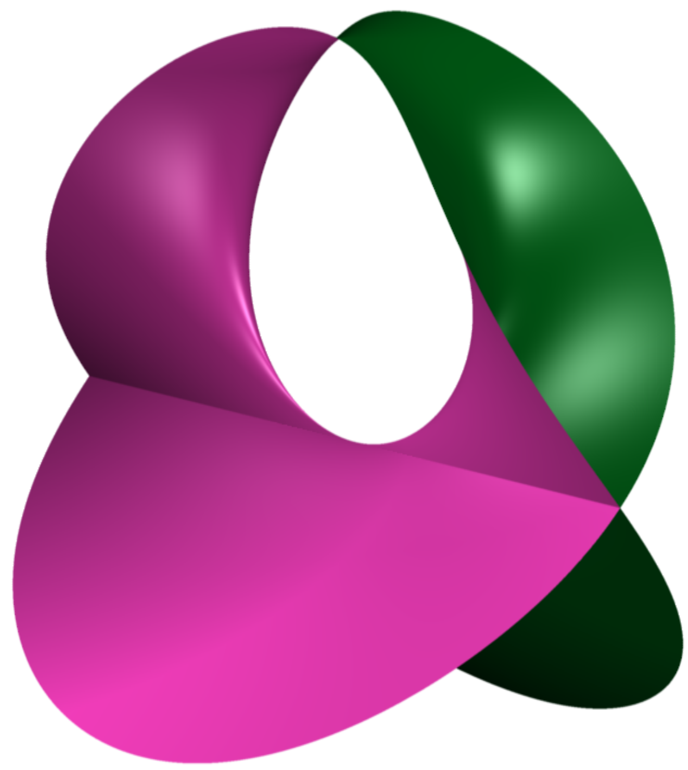
$y^2+z^3-z^4-10ax^2z^2=0$, $a=0,6$

Al introducir el parámetro “**a**”, en la pantalla del SURFER aparece otra barra deslizante que nos deja variar el valor de “a” entre 0 y 1.

Si multiplicamos esa “a” por 10, obtenemos un numero (10*a) que varía su valor entre 0 y 100.

Podemos ver en los gráficos que es distinto multiplicar el “10*a” a la y^2, que multiplicárselo al término x^2z^2. Deforma partes distintas en el gráfico. Y al usar la barra deslizante para variar el valor de “a” podemos apreciar muy bien qué parte es la que se deforma.

De aquí que podemos ver que es bien distinto de usar el zoom, que acerca o aleja todo al mismo tiempo.



$y^2+z^3-z^4-x^2z^2=0$, *zoom +*

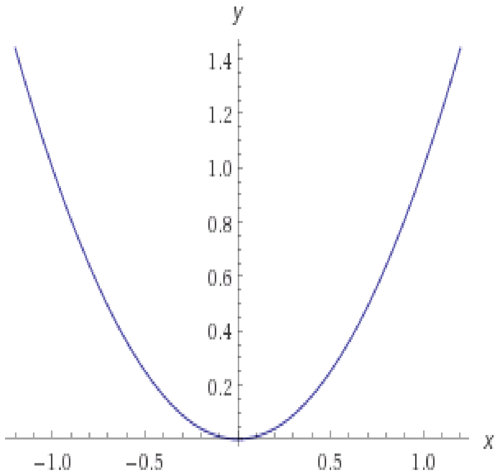
Comencemos a entender

Te contaremos un poco cómo trabaja el programa SURFER y vos al mismo tiempo, sería bueno que vayas probando, modificando, jugando...

¿Recordás la cuadrática más sencilla de todas?

Sí!! La parábola de ecuación : $y = x^2$

y su gráfico es así:



en el SURFER debés introducirla así:

y – x^2 = 0

que es simplemente un despeje de la anterior, pero el SURFER entiende las ecuaciones igualadas a cero y además, para poner un exponente como el de "x al cuadrado" se pone así: ^2.

Según las versión del SURFER que tengas instalada, puede verse de alguna de estas maneras

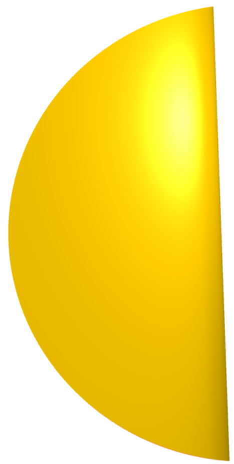


gráfico 1: y-x²=0

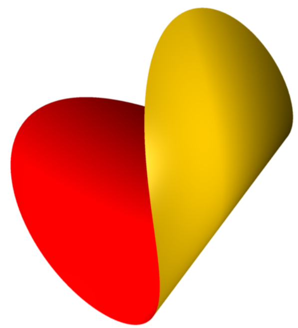


gráfico 2: y-x²=0

¿Qué ocurre? El *gráfico 1* no se parece en nada a la parábola que esperábamos! Sin embargo al rotar con el mouse el *gráfico 1* se convierte en algo como el *gráfico 2*, que ya va tomando una forma algo más parecida a la dichosa parábola.

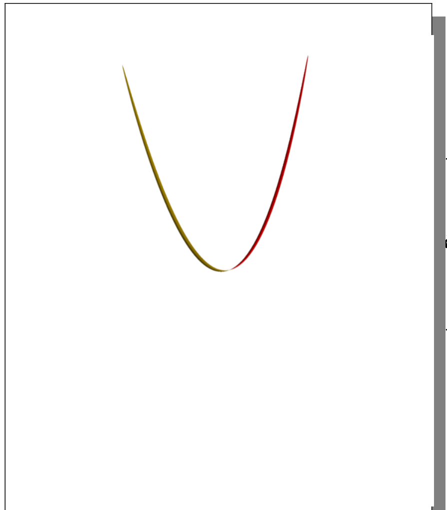


gráfico 3: $y\text{-}x^2=0$

...y si seguís jugando con el mouse, verás que puede verse como el *gráfico 3*. Que ya "se ve" como la tan ansiada parábola; y hasta en algún momento verás que el gráfico desaparece...

<u>**Vayamos por partes.**</u>

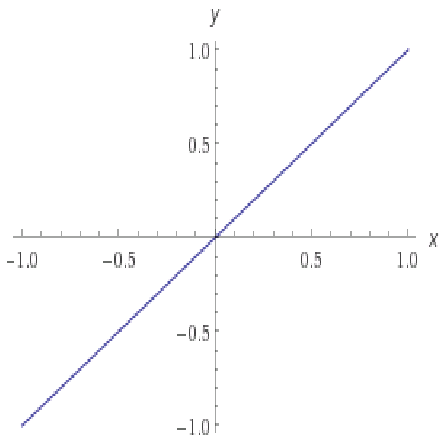
En primer lugar, el SURFER <u>no</u> muestra escalas ni ejes, por eso todos los gráficos los verás "como en el aire"

En los *gráficos 1 y 2* lo que estás viendo es la gráfica de la ecuación que pusiste, pero en tres dimensiones!! Y para decirlo rápidamente e informalmente, sólo estamos metiendo información para dos dimensiones: usamos sólo la "y" y la "x"; falta la "z", que vedría a jugar el papel de la profundidad.
Recién cuando la "acomodás" justo para que se vea "de frente" (*gráfico 3*) la podés ver como si fuera una parábola.
Probá vos qué ocurre si ponés ecuaciones como x – z^2 = 0 ó z – y^2 = 0 ¿No es lo mismo pero rotado?

Por otro lado, vemos que el gráfico -que debería extenderse indefinidamente- se observa "cortado como dentro de una esfera" . Esto es por que el SURFER utiliza un método para hacer los gráficos, que tiene esta característica de limitar el gráfico con una esfera imaginaria.

Ahora, agregale multiplicando un (y-x) para que que quede:

(y – x^2)*(y-x) = 0



que es como superponerle al gráfico de la parábola un gráfico de una recta de ecuación $y = x$

Pero como ya sabíamos, en el SURFER la debemos introducir como y- x = 0

Pero... ¿por qué al multiplicar las ecuaciones se ven superpuestos los gráficos? Lo que ocurre es que al tener dos términos multiplicados e igualados a cero, uno es cero ó el otro es cero, en nuestro caso, y el SURFER graficará ambas juntas.

y – x^2 = 0 ó y-x = 0

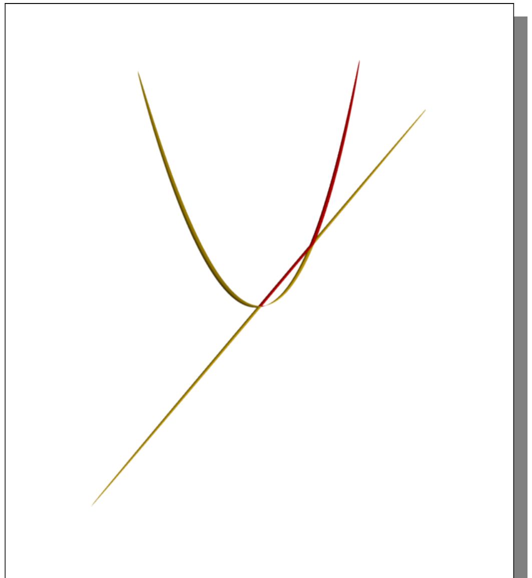


gráfico 4: $(y-x^2)(y-x)=0$

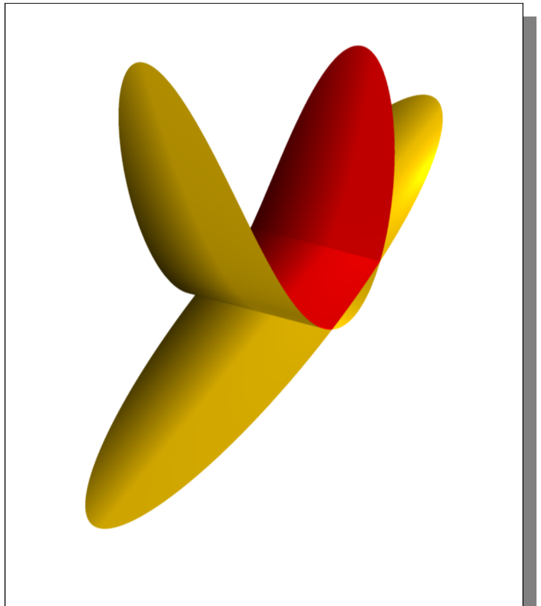


gráfico 5: $(y-x^2)(y-x)=0$ (rotado)

Vas a ver que queda como el *gráfico 4*. Y si lo rotás con el mouse quderá como el *gráfico 5*. Y también podés usar los colores que más te gusten.

Lo que ahora no parece nada claro es que recta de ecuación $y = x$, cuando la graficamos en el SURFER y empezamos a rotarlo se vea como un disco.

Lo vemos plano porque sólo estamos dando información que relaciona a “y” y a “x” y estamos dándole toda la libertad a “z”, que en este caso vendría a jugar el papel de la profundidad del gráfico; es decir que se debería ver como un plano infinito que, visto de frente, sólo observamos una recta.
Por otro lado, vemos los planos como un círculos llenos porque cada plano es cortado por una cáscara esférica imaginaria que es el límite para graficar que tiene el SURFER.
Por ejemplo, en el caso del gráfico 7, estamos viendo la gráfica de la ecuación

$$(y - x\text{^}2)*y*x = 0$$

que, como ya vimos significa lo mismo que graficar la superposición de

$$y - x\text{^}2 = 0,\ y = 0\ ,\ x = 0$$

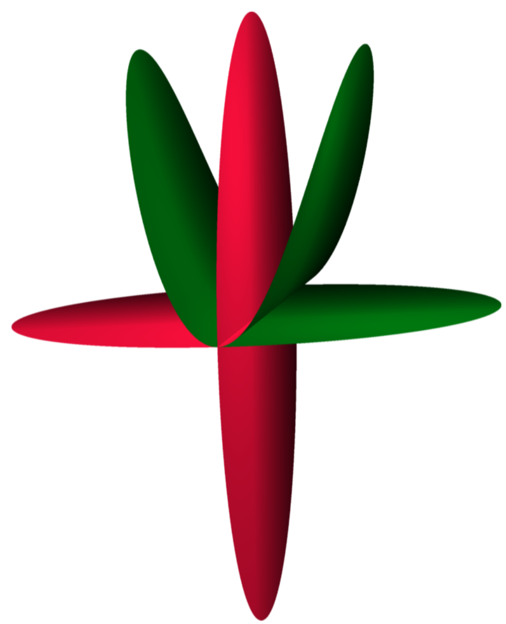


gráfico 6: $(y\text{-}x^2)yx=0$

de donde podés observar que $y = 0$ *y* $x = 0$ son las ecuaciones de los planos que ves horizontal y vertical. Ayudate con el SURFER, sacando alguna de las ecuaciones, para descubrir cuál es cual.

Empecemos a probar algunas ecuaciones clásicas de geometría:

La ecuación de la circunferencia de radio 1 es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

que en modo SURFER será

$$x\text{^}2 + y\text{^}2 - 1 = 0$$

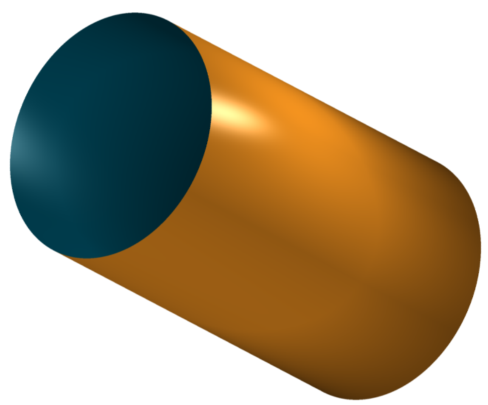


gráfico 7: *$x^2+y^2-1=0$*

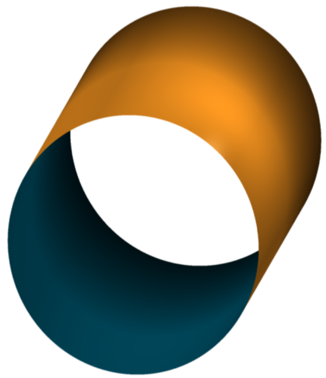


gráfico 8: *$x^2+y^2-1=0$ (rotado)*

que rotado y jugando un poco con el zoom del SURFER se verá algo así como los *gráficos 7 y 8.*

Aquí nuevamente podemos ver que el círculo que esperábamos en dos dimensiones, en tres dimensiones es un cilindro

Si agregamos la "z" a la ecuación, por ejemplo elevándola al cuadrado tal como están la "x" y la "y", tenemos la ecuación de la esfera.

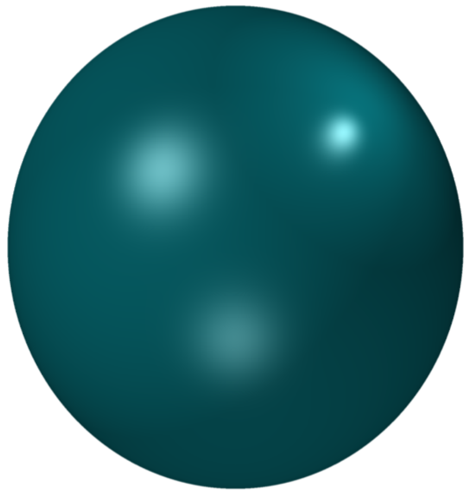


gráfico 9: *$x^2+y^2+z^2-1=0$*

Y vemos que si multiplicamos el término con "z" en la ecuación de la esfera en el SURFER por un numero mayor que 1, la ecuación queda

x^2+y^2+ **30***z^2 - 1=0,

y observamos que queda como un plato volador, y es ni más ni menos que una esfera aplastada.

gráfico 10: $x^2+y^2+30z^2 -1=0$

Así, como modificamos "algo" en la dirección del eje z (en este caso aplastamos la esfera), por ejemplo podríamos "correr" del centro del gráfico a la superficie que queremos dibujar.

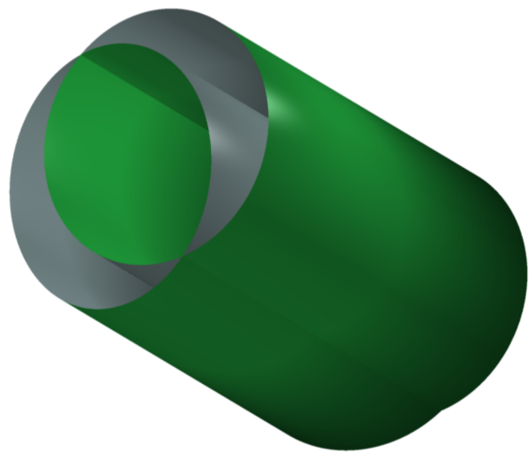


gráfico 11: $(x^2+y^2 -1)(x^2+(y-0,5)^2 -1)=0$

Dibujemos dos cilindros, uno centrado y otro corrido en la dirección "y".
Para esto, solo sumamos o restamos un numero a la "y".

Para obtener el *gráfico 11* sólo multiplicamos las ecuaciones de un cilindro centrado con la ecuación de un cilindro corrido en la dirección en 0,5 unidades. Pero no podríamos distinguir fácilmente cuál es el corrido y cuál está centrado, ya que los ejes no se ven.

gráfico 12: zoom del gráfico 12

En el *gráfico 12*, sólo hicimos un zoom del *gráfico 11* y podemos observar que el que está corrido comienza a salirse de la esfera imaginaria, límite del SURFER.

De esta manera podríamos realizar ya una pequeña creación, por ejemplo, entrelazando dos cilindros aplastados y/o corridos en alguna dirección con una esfera corrida del centro; y con el zoom hacemos que se escape un poco de la esfera imaginaria.

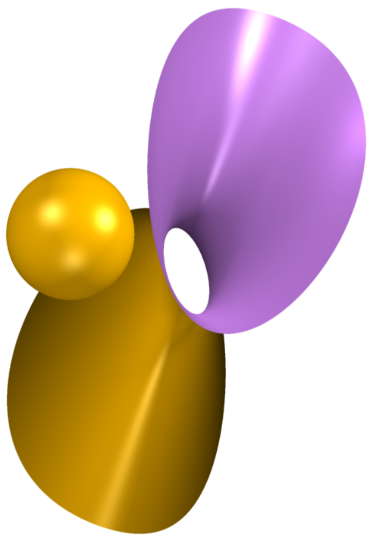
$(20x^2+(y-1)^2-3)((x-0,5)^2+5y^2-2)((x-1)^2+(y+1)^2+z^2-0,7)=0$

Y así como introdujimos números (constantes multiplicativas o aditivas) que producen diferentes cambios en el gráfico, y jugamos con el zoom, también podemos introducir parámetro en lugar de estas constantes y jugar con ellas para ver cambios continuos con la barra deslizante que controla cada parámetro.

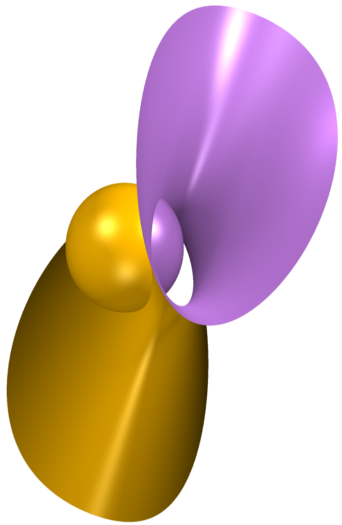
Hagamos algo sencillo en ese sentido para visualizar bien esto. Controlemos el radio (con el parámetro "a") y el corrimiento (con el parámetro "b") de una esfera para "chocar" con un hiperboloide aplastado.

Acá te mostramos algunas imágenes para algunos valores de los parámetros introduciendo la ecuación:

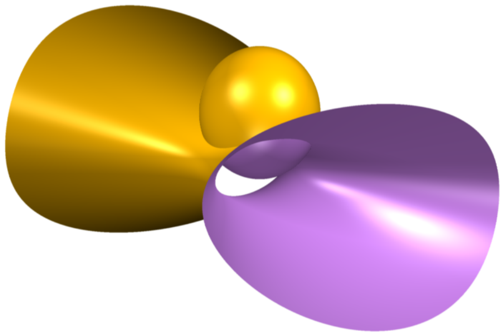
(x^2+(y-2*b)^2+z^2-4*a)*(x^2-5*y^2-z^2+1)=0



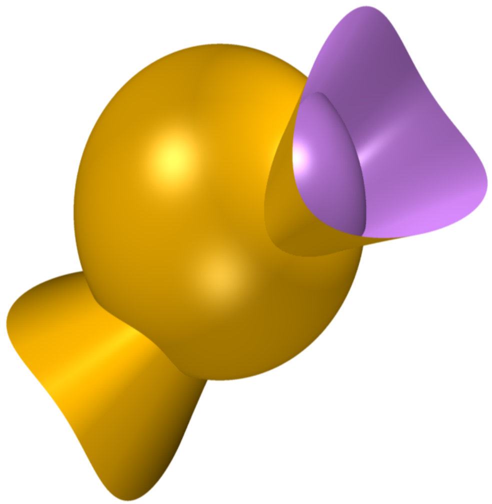
a=0,2 ; b=0,9



a=0,2 ; b=0,4



a=0,2 ; b=0,4 (rotada)

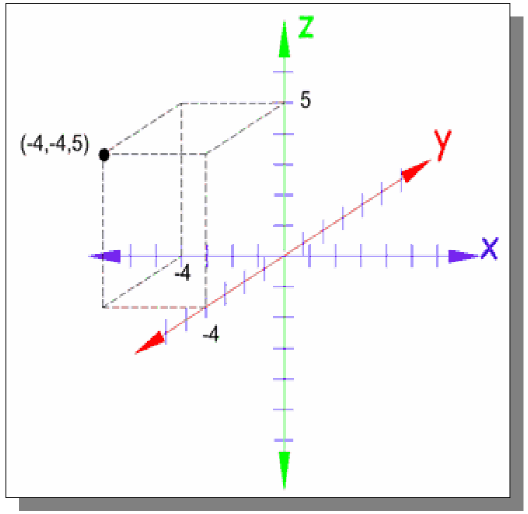


a=0,95 ; b=0,3

Ahora es necesario comenzar a hablar en lenguaje matemático un poco más preciso

En primer lugar debemos hablar de qué son las letras x,y,z. Son las letras que utilizamos para referirnos a cada coordenada del espacio de tres dimensiones. Donde cada una de ellas puede tomar infinitos valores positivos y negativos.

Y llamaremos, **origen de coordenadas (lo tendremos en el centro), al punto (0,0,0)** obviamente.



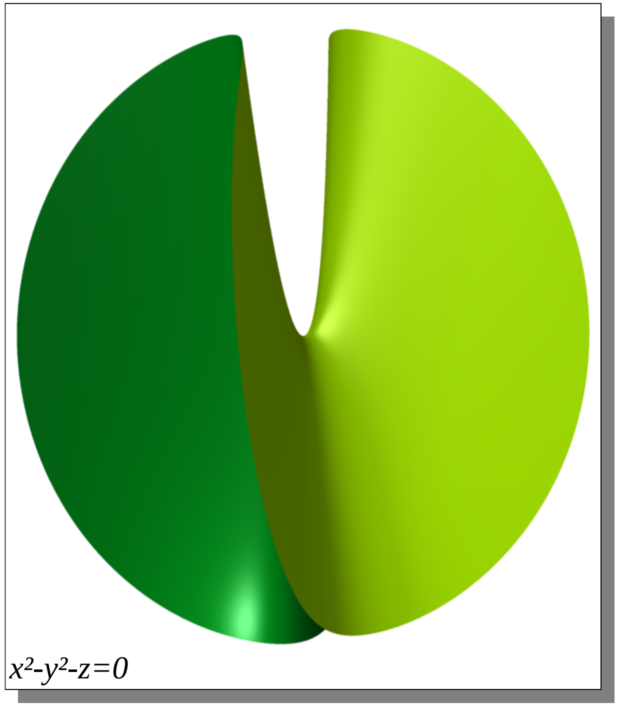
Ya contamos lo que es una expresión algebraica informalmente en la primer sección de esta guía. Ahora usaremos la notación f(x,y,z) para referirnos a una expresión algebraica y g(x,y,z) para referirnos a otra expresión algebraica.

Cuando en el SURFER ponemos f(x,y,z)=0, y el se muestra en pantalla una colorida superficie, lo que estás viendo son todos los puntos (x,y,z) del espacio que cumplen con la ecuación.

Veamos un ejemplo, si ponemos la fórmula

x^2-y^2-z=0

estamos diciéndole al SURFER que dibuje una superficie conocida como Paraboloide Hiperbólico, que son todos los puntos (x,y,z) del espacio referidos a al origen que cumplen con dicha ecuación.



Así, el punto (2,1,1) estará dibujado y también el punto (-2, 0, 4) (pertenecen a dicha superficie algebraica) y el (3,2,1) no.

Pues reemplazando en la fórmula,

$$2^2-1^2-1 = 0$$

y

$$(-2)^2-0^2-4 = 0$$

$$\text{pero } 3^2-2^2-1 = 4 \neq 0$$

Y así podríamos proponer infinitos puntos que son dibujados, e infinitos que no. Pero una computadora no puede dibujar los infinitos puntos que pertenecen a una superficie.

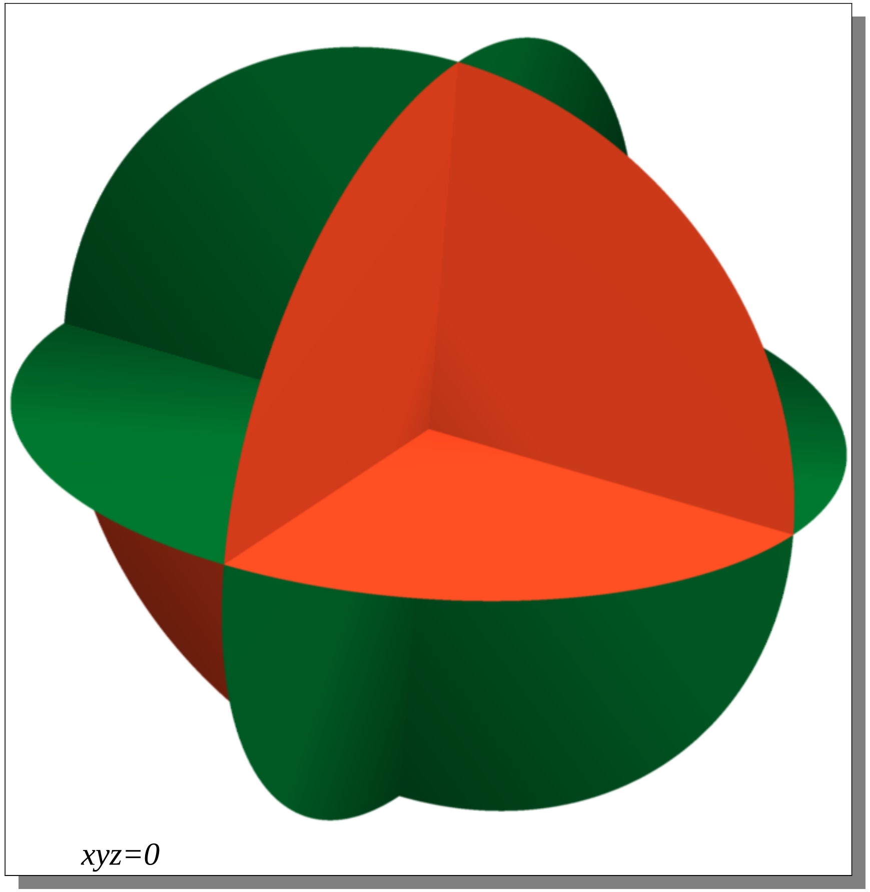
El programa dibuja muchos puntos, pero no infinitos, los suficientes para que nosotros podamos verla en pantalla.

Por esta razón, si queremos dibujar el plano xy, es decir todos los puntos de la forma (x,y,0), lo hacemos introduciendo la ecuación z=0, y si la rotamos para verla "de frente", vemos una linea muy débil que casi no se ve. Si queremos dibujar los tres planos coordenados sólo debemos introducir la ecuación

$$x*y*z=0$$

que significa que estamos viendo unión de los tres planos coordenados,

$$x=0 \text{ ó } y=0 \text{ ó } z=0$$



Trucos Útiles

Ahora, sabiendo todo lo anterior, estamos en condiciones de entender algunas ideas ingeniosas que nos permitirán dominar con mayor soltura el SURFER

Trabajando con varias superficies

Ya vimos que si queremos graficar dos superficies conjuntamente

f(x,y,z)=0 **ó** g(x,y,z)=0

basta con introducirlas_multiplicadas:

f(x,y,z)*g(x,y,z)=0

Esto es lo que en matemática se llama la **UNIÓN** de las superficies

Hagamos esto para ver la unión de la superficie

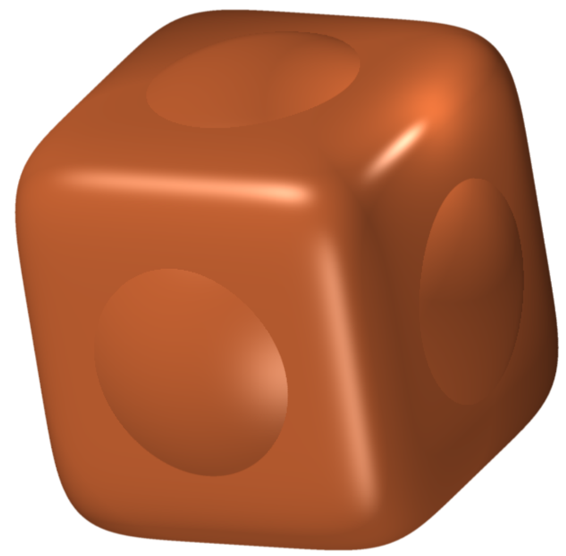
x^2+y^2+z^2-1=0

(una esfera de radio 1)

con

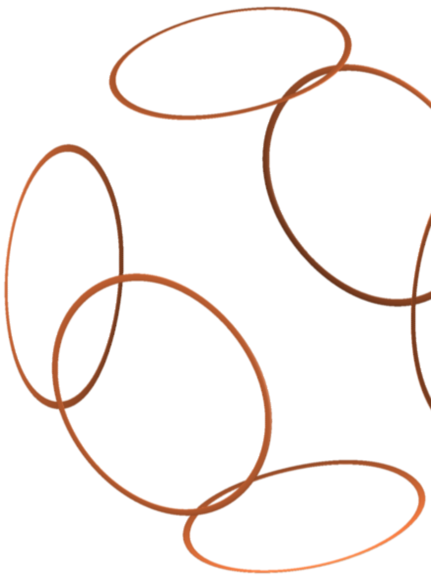
x^6+y^6+z^6-0,5=0

(es una especie de cubo de aristas redondeadas)



$(x^2+y^2+z^2-1)(x^6+y^6+z^6-0{,}5)=0$

Ahora bien, si queremos graficar solamente la junta donde se sueldan ambas superficies, tenemos el problema que esto será una linea **(el SURFER sólo puede graficar superficies)**.



$(x^2+y^2+z^2-1)^2+(x^6+y^6+z^6-0,5)^2 - 0,0001=0$

Esta curva se llama curva **INTERSECCIÓN** de las superficies

Como lo que queremos es ver los puntos donde se cumple que f(x,y,z)=0 **y a la vez** g(x,y,z)=0 debemos pensar algo para hacer esto. El truco es escribir:

$$(f(x,y,z))^2 + (g(x,y,z))^2 = 0$$

y esto sólo vale cuando simultáneamente

$$f(x,y,z)=0 \ \text{y} \ g(x,y,z)=0$$

En el caso de querer ver la intersección de la esfera con el cubo, ponemos en la linea de comando de SURFER

(x^2+y^2+z^2-1)^2+ (x^2+y^2+z^2-0,5)^2 – **0,0001** = 0

<u>IMPORTANTE</u>: Debemos introducir un valor pequeño (en este caso 0,0001) en la ecuación para "engordarla", si no no veremos nada, pues en realidad la curva intersección es una línea.

Otro ejemplo. Si queremos ver la intersección del plano *yz* (es decir todos los puntos de la forma (0,y,z)) con el plano *xz* (es decir todos los puntos de la forma (x,0,z)), estamos queriendo ver el eje z (todos los puntos de la forma (0,0,z)) deberemos introducir en la linea de comando del SURFER la ecuación que represente que x=0 e y=0, al mismo tiempo.

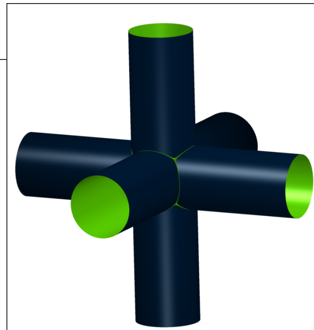
x^2+y^2=0

que como ya sabíamos, no veremos nada, pues es sólo una línea (el eje z).
Para lograr ver algo "parecido" al eje z, debo darle algo de "espesor" a la línea y escribir en la línea de comandos algo como:

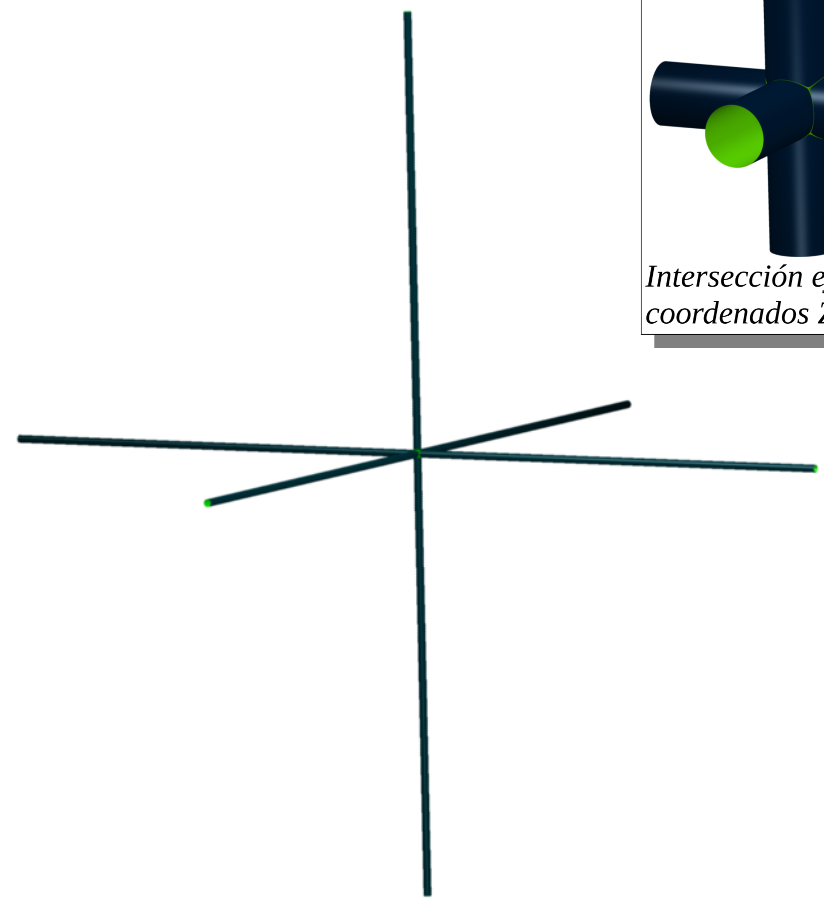
x^2+y^2 – 0,001 = 0

¡Que por otro lado es la ecuación de un cilindro muy angosto!

Y de esta manera podremos intuir dónde los tres ejes coordenados dibujando un cilindro bien delgado alrededor de ellos.



Intersección ejes coordenados ZOOM



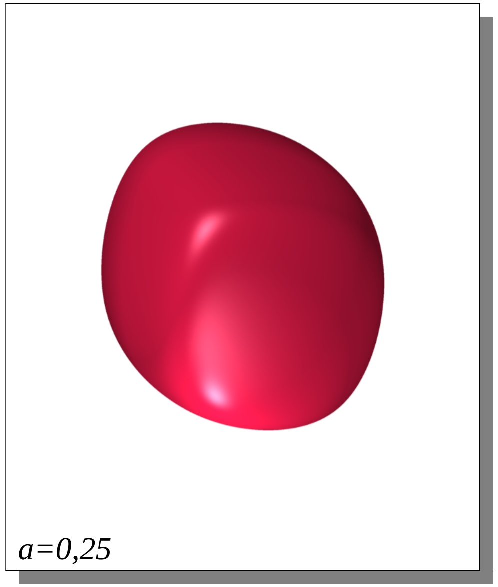
$(x^2+y^2 - 0{,}001)(z^2+y^2 - 0{,}001)(x^2+z^2 - 0{,}001)=0$

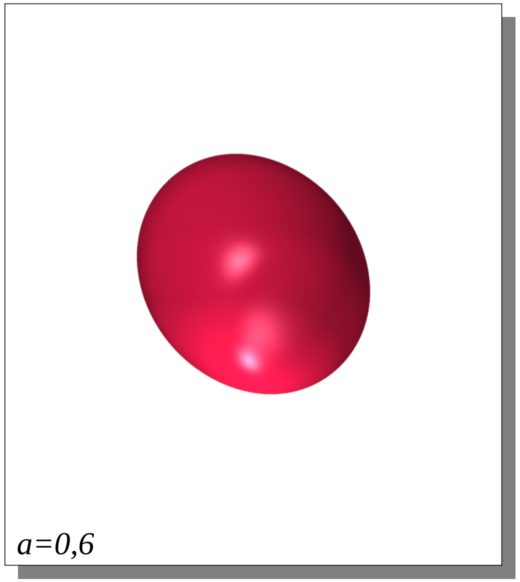
<u>Transformando una superficie en otra</u>

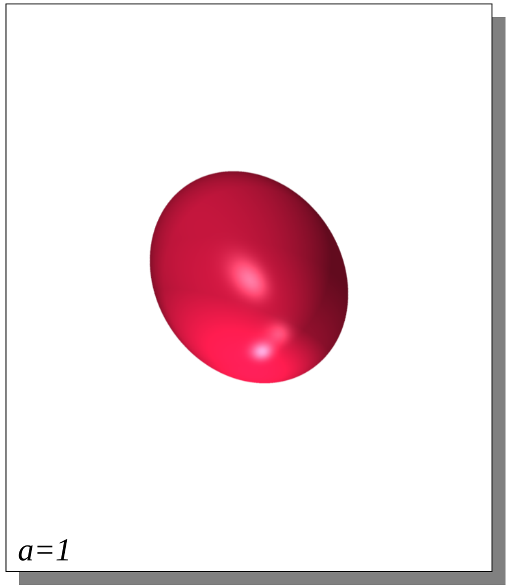
Para ver cómo una superficie se "transforma" en otra, podemos utilizar un parámetro para ayudarnos.
Transformemos un elipsoide en una especie de cubo escribiendo en la linea de comando del SURFER esto:

a*(3*x^2+3*y^2+z^2-1)^2 + (1-a)*(x^8+y^8 z^8 – 0,5)^2 = 0

cuando a=0 sólo se ve el cubo, si a=1 sólo se ve el elipsoide (es como una pelota de rugby) y para valores intermedios de "a" vemos como una mezcla de ambos.







En general si queremos que una superficie dada por una expresión algebraica f(x,y,z) se transforme en otra dada por g(x,y,z) solo debemos introducir en la línea de comandos

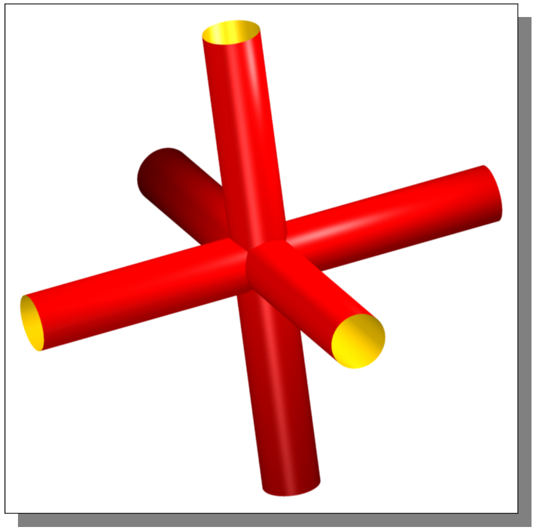
$$\mathbf{a}*f(x,y,z)+(1-\mathbf{a})*g(x,y,z)=0$$

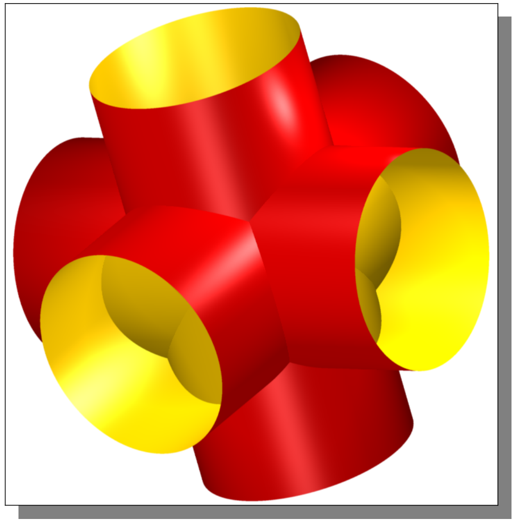
y jugar con el parámetro "a"

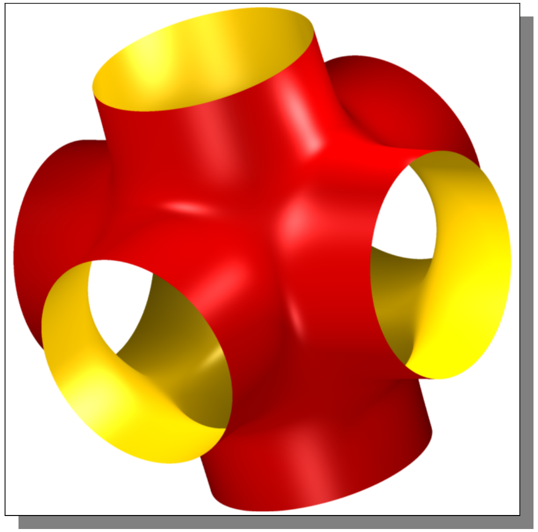
Soldando y desoldando superficies

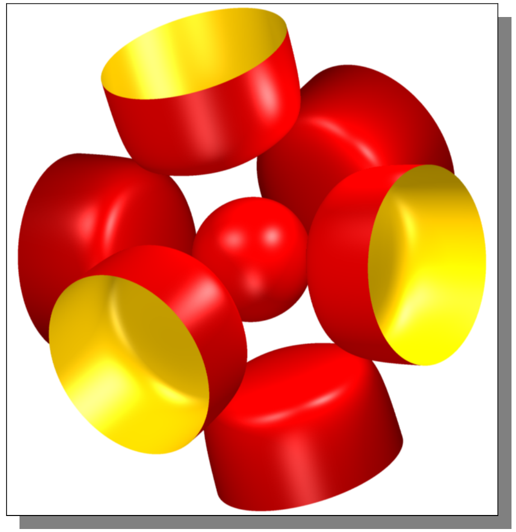
Ahora un truco para ver más suaves las juntas de intersección de superficies o también para ver como "desoldadas" las superficies.

Sabemos ya que si dadas dos superficies, las escribimos f(x,y,z)*g(x,y,z)=0 veremos las dos superpuestas, es decir la unión de ambas. Y vemos que sus intersecciones están bien delineadas.









Pero si escribimos

$$f(x,y,z)*g(x,y,z)-0.01 = 0$$

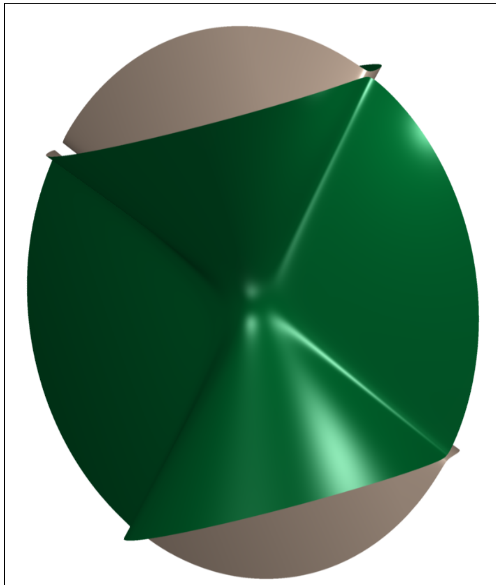
ó

$$f(x,y,z)*g(x,y,z)+0.01 = 0$$

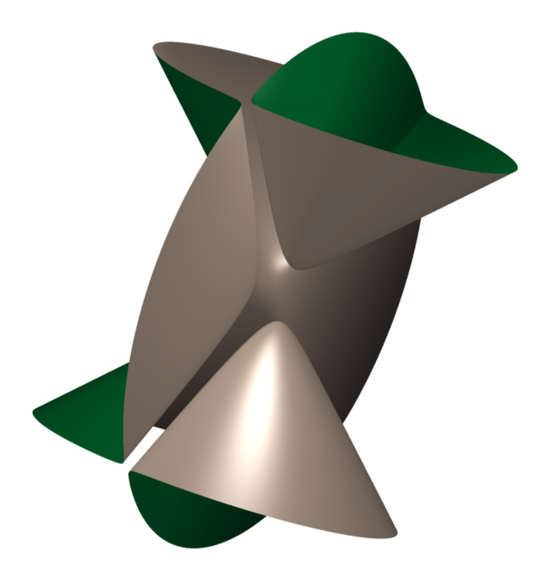
veremos que las intersecciones de las superficies se ven "suavisadas", en el primer caso, y "rotas" en el segundo

¡<u>Ojo</u>! : Esto de sumar o restar un numero pequeño a una unión de superficies no siempre produce el mismo efecto.

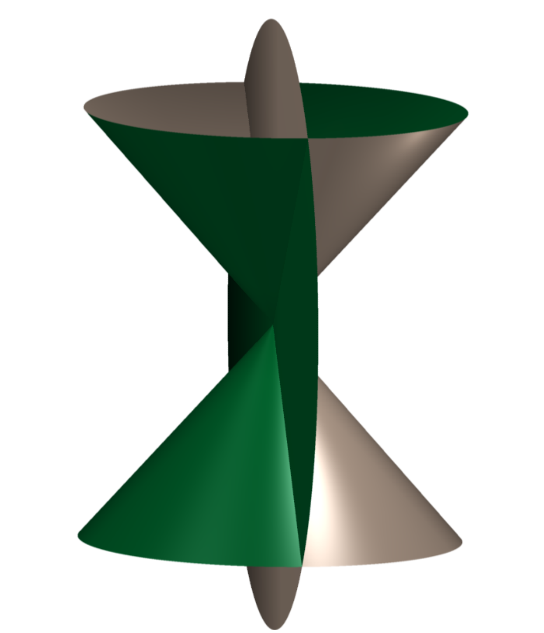
Tomemos el ejemplo de un cono atravesado por un plano y dibujémoslos juntos. Y además usemos el truco anterior para “alterar” la intersección.



$(x^2+y^2-z^2).x - 0{,}5 = 0$ (rotado)



$(x^2+y^2-z^2).x - 0{,}5 = 0$



$(x^2+y^2-z^2).x = 0$

En algunas partes se separa y en otras se suaviza. Esto se debe a que los puntos simétricos del cono reemplazados en esta ecuación, no tienen el mismo signo de un lado que del otro.

Manos a la Obra!

Para fijar todo lo anterior, te recomendamos que hagas estos ejercicios y luego ya te pongas a realizar tus propias creaciones!

1) escribí en el SURFER x^2-a = 0 y jugá con la barra deslizante. ¿Qué es lo que ves? ¿Por qué?

   Pista1: ¿Cómo se ven los planos limitados por la esfera imaginaria del SURFER?
   Pista2: Diferencia de cuadrados

2) escribí en el SURFER la fórmula para visualizar

   a) La unión de una esfera de radio 1 con un cilindro de diámetro más pequeño que el de la esfera y usando un parámetro desplazar el cilindro en la dirección eje x.
   b) La intersección de las mismas superficies que en el item a) y ver cómo cambia dicha curva intersección al variar el valor de "a".

3) Difícil: En la línea de comando del SURFER escribí la ecuación x^4- y^2- z^2=0
   Utilizando un parámetro "a" modificá la ecuación para que, usando la barra deslizante que controla "a" , la superficie se vea como toda una bien soldada, o dos separadas.

   Pista: pensar qué valores toma (a-0,5)

4) La ecuación $ax^2+by^2+z^2=1$ es la de un elipsoide, intersecala con el plano "xy" y para diferentes valores de a y b observá la curva intersección de ambas. Modificá los signos y las potencias y mirá qué variedad de cambios en la forma!

5) Escribí en la linea de comando la ecuación

$$(x^2+y^2+z^2-1)-1500(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)=0$$

   a)modificá el valor 1500 dede 0 hasta 100000
   b)cambiá algunos "+" por algún "-"
   c)cambiá todos los "+" que aparecen el el segundo término de la expresión

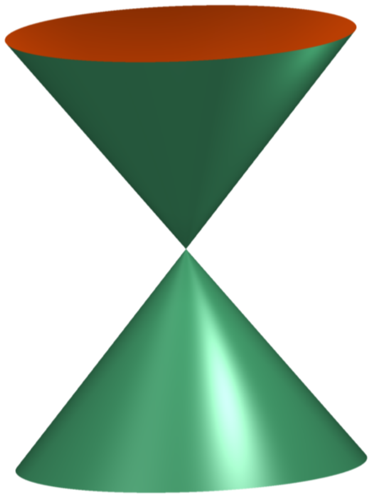
Elaborá concluisones de lo que ocurre. ¿Podés modificar la ecuación para que tenga 4 puntas?

Para Curiosos y Avanzados

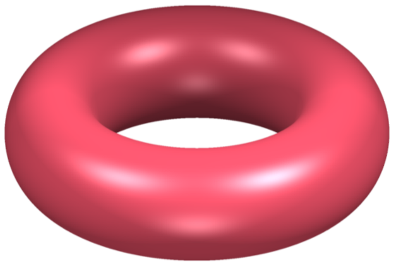
En geometría algebraica, podemos clasificar a las superficies en dos grandes ramas: las que son lisas como la esfera o el toro, y las que tienen algún pico como el cono.

Ese “pico” o “punta” que vemos en el cono se conoce con el nombre de singularidad. Las superficies lisas se llaman no-singulares.

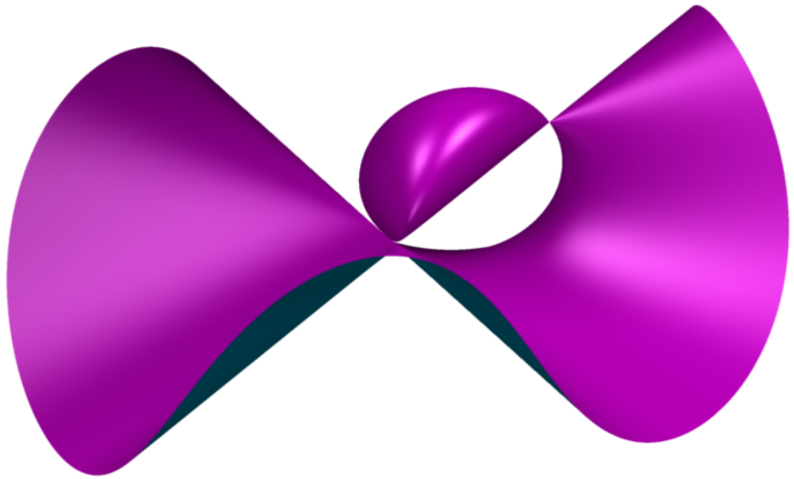
Veamos una con dos singularidades.



CONO $x^2+y^2-z^2 = 0$



TORO $(x^2+y^2-z^2)^2 - 9(x^2+y^2) = 0$



$x^3 + y^2z + xz^2 - xz = 0$

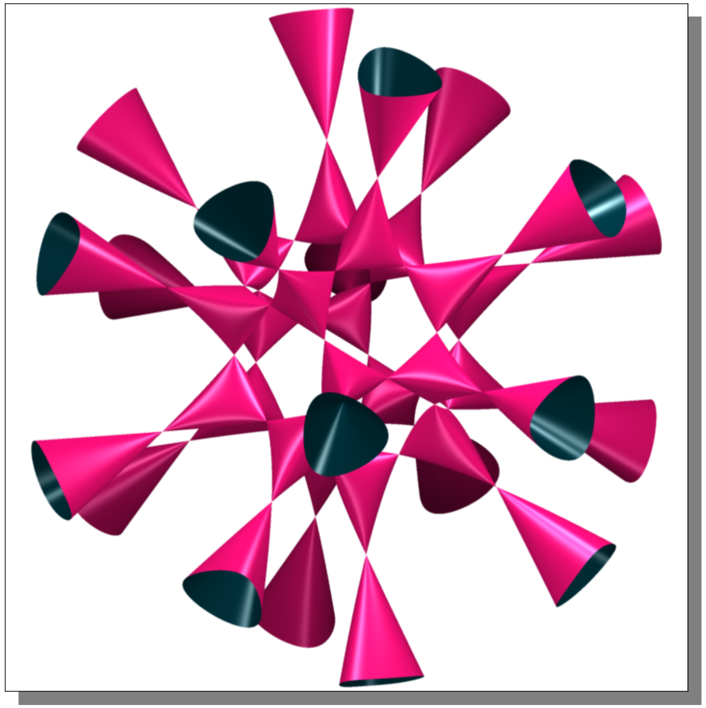
Superficies con muchas singularidades

El grado de una expresión algebraica como las que venimos viendo, es el exponente más alto que tenga.
Por ejemplo la anterior, de dos singularidades, tiene grado 3.

¿Dependiendo del grado, podremos predecir cuántas singularidades podrá tener como máximo la superficie?

La Séxtica de Barth fue un hallazgo sorpresivo. Es una superficie de grado 6 construida por W. Barth en 1996 y presenta 65 singularidades que es el máximo numero que puede tener una superficie de grado 6. Pero esto fue demostrado por los geómetras recién en 1997

La séxtica de Barth destaca por su simetría en forma de icosaedro.
que recuerda a la de una molécula llamada fulereno, la tercera forma más estable del carbono, junto al grafito y al diamante.



En el Surfer debemos escribir

4*((1+sqrt(5)/2)^2*x^2-y^2)*((1+sqrt(5))/2)^2*y^2-z^2)*
((1+sqrt(5))/2)^2*z^2-x^2)-
(1+2*(1+sqrt(5))/2))*(x^2+y^2+z^2-1)^2 = 0

La Séptica de Labs tiene 99 singularidades

¡¡Esta es la ecuación!!

```
x^7-21*x^5*y^2+35*x^3*y^4-
7*x*y^6+7*x^6*1+21*x^4*y^2*1+21*x^2*y^4*1+7*y^6*1-
57*x^4*1^3-114*x^2*y^2*1^3-57*y^4*1^3+(24/7*a^2+768/49*a+
800/7)*x^2*1^5+(24/7*a^2+768/49*a+800/7)*y^2*1^5+(-
149808/2401*a^2+3216/343*a-147584/2401)*1^7+(-49*a^2+7*a-
52)*x^4*1^2*z+(-98*a^2+14*a-104)*x^2*y^2*1^2*z+(-49*a^2+7*a-
52)*y^4*1^2*z+(128/7*a^2+704/49*a+128/7)*x^2*1^4*z+(128/7*a^
2+704/49*a+128/7)*y^2*1^4*z+(-1632/343*a^2+16/7*a-
192/343)*1^6*z+(-98*a^2+14*a-101)*x^4*1*z^2+(-196*a^2+28*a-
202)*x^2*y^2*1*z^2+(-98*a^2+14*a-101)*y^4*1*z^2+(3016/7*a^2-
2904/49*a+440)*x^2*1^3*z^2+(3016/7*a^2-
2904/49*a+440)*y^2*1^3*z^2+(-17440/343*a^2+416/49*a-
17040/343)*1^5*z^2+(-49*a^2+7*a-50)*x^4*z^3+(-98*a^2+14*a-
100)*x^2*y^2*z^3+(-49*a^2+7*a-50)*y^4*z^3+(5776/7*a^2-
5648/49*a+5888/7)*x^2*1^2*z^3+(5776/7*a^2-
5648/49*a+5888/7)*y^2*1^2*z^3+(-313136/343*a^2+6288/49*a-
319264/343)*1^4*z^3+(3680/7*a^2-
3608/49*a+536)*x^2*1*z^4+(3680/7*a^2-
3608/49*a+536)*y^2*1*z^4+(-592240/343*a^2+11856/49*a-
603856/343)*1^3*z^4+(816/7*a^2-
800/49*a+832/7)*x^2*z^5+(816/7*a^2-800/49*a+832/7)*y^2*z^5+(-
458832/343*a^2+1312/7*a-467840/343)*1^2*z^5+(-
166272/343*a^2+3328/49*a-169536/343)*1*z^6+(-
166272/2401*a^2+3328/343*a-169536/2401)*z^7=0   ,  a=0.5
```

En 1982 el matemático A. N. Varchenko demostró que no se pueden obtener superficies de grado siete con más de 104 singularidades .

Pero sólo Oliver Labs en el 2004, pudo dar con una superficie con 99 singularidades.
La construcción de sépticas con 100, 101, 102, 103 o 104 singularidades continúa siendo un problema abierto.

Superficies Algebraicas y Arquitectura

La primera torre hiperboloide del mundo es una torre de celosía en acero, de gran belleza belleza, está ubicada en Polibino, región Lipetsk, Rusia.

La torre hiperboloide fue construida y patentada en 1896 ingeniero y científico ruso Vladimir Shújov .

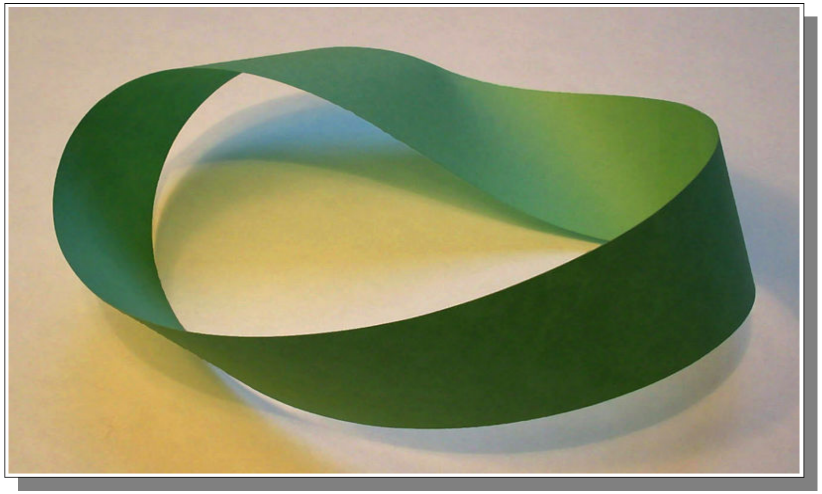
Las hiperboloides tienen la propiedad de ser una superficie doblemente reglada: se pueden construir íntegramente con un doble haz de rectas. Es decir que para construir una estructura hiperboloide de perfiles metálicos, no hace falta curvarlos! Belleza y resistencia a la vez.

Muchos arquitectos famosos, Antoni Gaudí, Le Corbusier, Oscar Niemeyer utilizaron las estructuras hiperboloide en sus obras.

La Torre de Kobe (1963, Japón) Hiperboloide

La cinta de Moebius

La **cinta de Moebius** es una superficie con una sola cara y un solo borde.

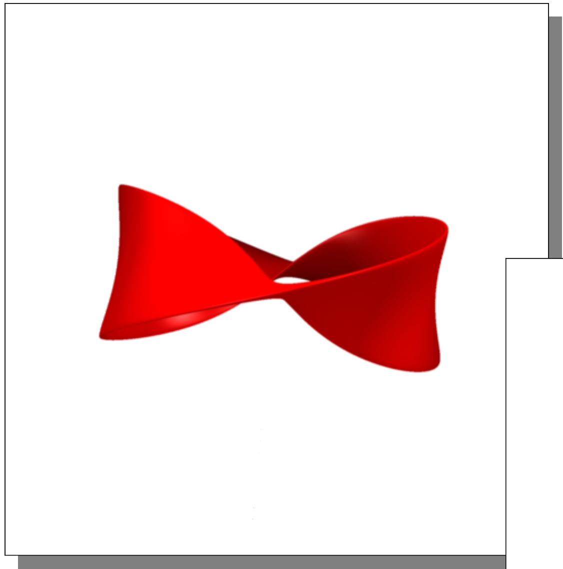


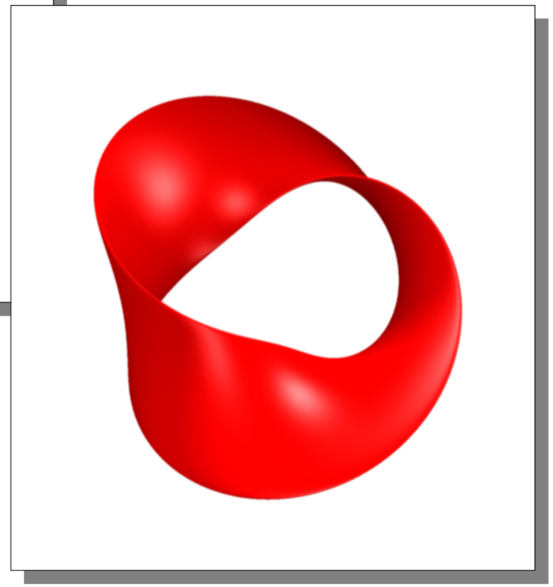
Se puede construir sencillamente tomando una tira de papel y uniendo los dos extremos dando media vuelta a uno de ellos

Fue descubierta en forma independiente por los matemáticos alemanes Agust Ferdinand Möbius y Johann Benedict Listing en 1858.

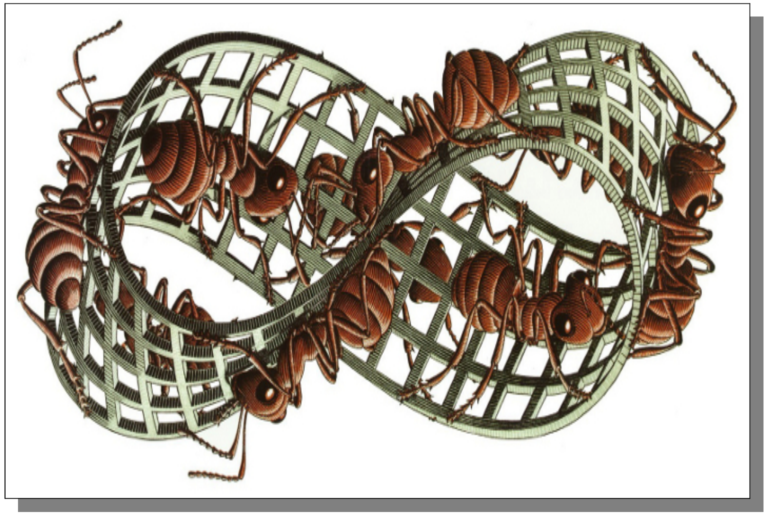
En la linea de comando del SURFER debes escribir

((x^2 + y^2 + 1)*(a*x^2 + b*y^2) + z^2* (b* x^2 + a *y^2)-
2*(a - b)*x*y*z-a*b*(x^2 + y^2))^2-
4*(x^2 + y^2)* (a*x^2 + b*y^2-x*y*z*(a - b))^2=0





El artista M. C. Escher utilizó la banda de Moebius como motivo principal en diversas obras.



El libro de cuentos Queremos tanto a Glenda, del escritor argentino Julio Cortázar, publicado en 1980, cuenta con una composición titulada *Anillo de Moebius*

La película *Moebius* hace referencia a la teoría de la cinta que lleva el mismo nombre, aplicada a una supuesta red de subterráneos de la Ciudad de Buenos Aires ampliada. Se basa en un cuento de A. J. Deutsch, *Subway Named Moebius* (1950).

Símbolos gráficos, logotipos y emblemas

El símbolo gráfico internacional de reciclaje y los de otras actividades similares, están basados en la imagen de la banda de Möbius.

Los partidos humanistas afiliados a la Internacional Humanista utilizan como logotipo un símbolo gráfico basado en la banda de Möbius.

La Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA tiene un proyecto llamado Moebius

http://moebius.dm.uba.ar/galeria.php

donde se pueden ver varios trabajos de chicos de diferentes escuelas que trabajaron con el SURFER

Apéndice 1:

Resumiendo:

- El SURFER sólo grafica superficies algebraicas reales, expresiones polinómicas de variables x, y, z. (es decir fórmulas que contengan x, y, z, sumadas, restadas o multiplicadas entre sí, con exponentes naturales, y números también sumando o restando o multiplicando a esas variables.

- Para que el SURFER entienda una fórmula y grafique los puntos en el espacio que la cumplen, debés ingresarla igualada a cero. Por ejemplo $x^5z + 3y - z^2=1$, deberás ingresarla así:

x^5*z + 3*y- z^2 -1 = 0

- Si querés ver cómo una superficie cambia, si cambiara alguno de los coeficientes, en lugar de ellos podés introducir un parámetro "a", "b" o "c" y con la barra deslizante que aparece podrás variar su valor entre cero y uno. En el ejemplo anterior pordría ser algo así:

x^5*z + a*y- (z-b)^2 - c = 0

- Si querés graficar dos superficies f(x,y,z) y g(x,y,z) a la vez, debés introducirlas multiplicadas, así:

f(x,y,z)*g(x,y,z) = 0

- Si querés graficar la curva donde se unen ambas superficies deberás escribir esto:

(f(x,y,z))^2 + (g(x,y,z))^2 – 0,001 = 0,

[nota: el 0,001 es un valor pequeño cualquiera]

- Si querés graficar superficies al mismo tiempo, pero que la curva de intersección entre ambas no esté muy bien definidas ebés introducirlas multiplicadas pero sumando o restando algunvalor pequeño, así

f(x,y,z)*g(x,y,z) ± 0,01 = 0

[nota: el 0,001 es un valor pequeño cualquiera]